BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE S.T.I.

Génie électronique – Génie électrotechnique – Génie optique

SESSION 2007

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 4 heures

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT
LES DEUX EXERCICES ET LE PROBLÈME

* * * *

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des calculatrices électroniques, programmables, alphanumériques ou à écran graphique **est autorisée**, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit fait usage d'aucune imprimante.
Chaque candidat ne peut utiliser qu'une seule machine sur sa table.
En cas de défaillance, elle pourra cependant être remplacée.
Cependant, les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que l'échange d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits.
(circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999)

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Deux feuilles de papier millimétré seront distribuées en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 : (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation $z^2+4z+16=0$.

2. Pour tout nombre complexe *z*, on pose $\mathrm{P}(z)=z^3-64$.

a) Calculer $\mathrm{P}(4)$.

b) Trouver les réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout nombre complexe *z*,
$\mathrm{P}(z)=(z-4)\left(az^2+bz+c\right)$.

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $\mathrm{P}(z)=0$.

3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_\mathrm{A}=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_\mathrm{B}=\overline{z_\mathrm{A}}$ et $z_\mathrm{C}=4$.

a) Établir que $z_\mathrm{A}=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Écrire z_B sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

b) Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

c) Déterminer la nature du triangle ABC.

4. On appelle D l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et on appelle z_D l'affixe du point D.

a) Déterminer le module et un argument de z_D.

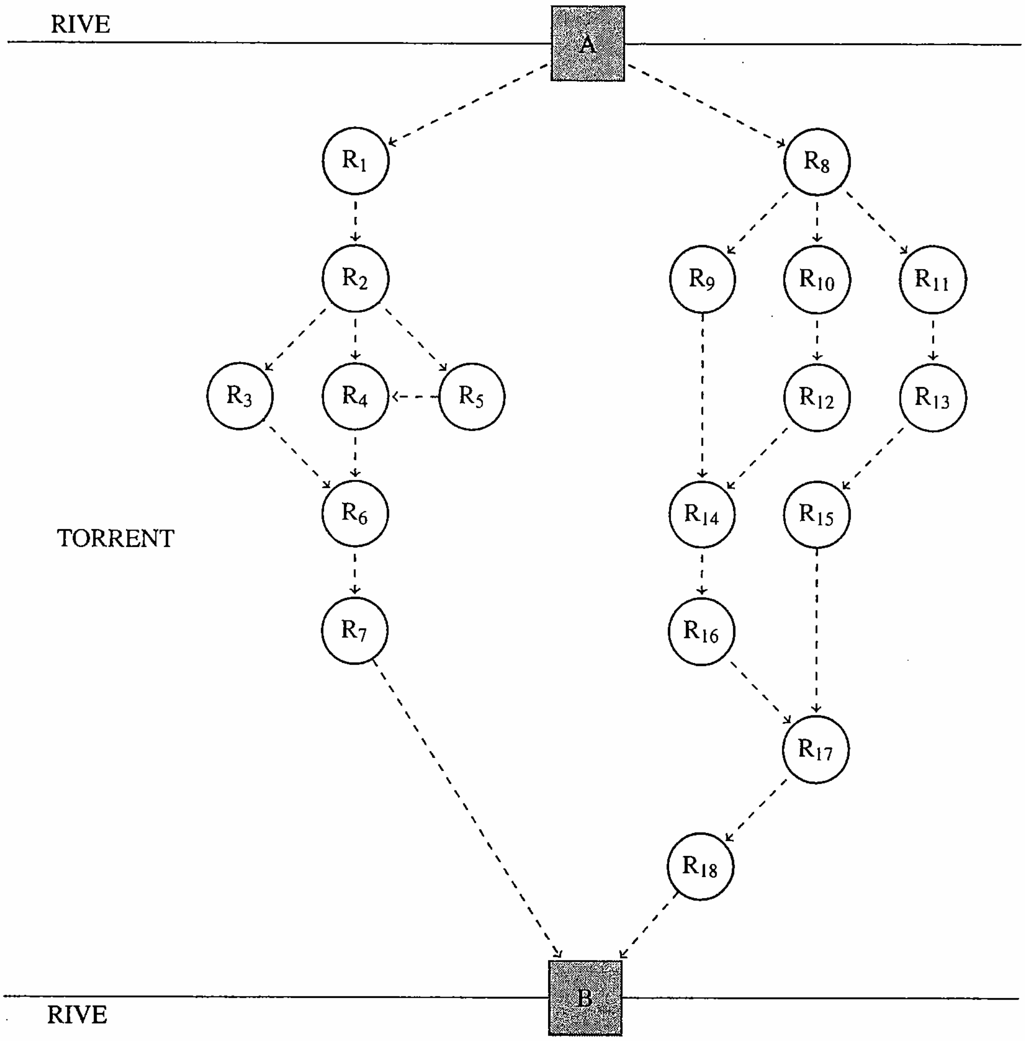
b) En déduire la forme algébrique de z_D.

c) Placer le point D sur le graphique précédent.

EXERCICE 2 : (4 points)

Le personnage virtuel d'un jeu électronique doit franchir un torrent en sautant de rocher en rocher.

Le torrent se présente de la manière suivante (les disques $R_1, R_2, \ldots, R_{17}, R_{18}$ représentent les rochers) :



Le personnage virtuel part de A pour aller en B. Il ne peut choisir que les trajets matérialisés par des pointillés et avancer uniquement dans le sens des flèches.

On appelle « parcours » une suite ordonnée de lettres représentant un trajet possible.
Par exemple : $AR_1R_2R_3R_6R_7B$ est un parcours qui nécessite 6 bonds.

Toute probabilité demandée sera donnée sous forme de fraction.

1. Déterminer les six parcours possibles.

2. Le joueur choisit au hasard un parcours. On admet que les différents parcours sont équiprobables.

   a) Quelle est la probabilité p_1 de l'événement « le personnage virtuel passe par le rocher R_7 » ?

   b) Quelle est la probabilité p_2 de l'événement « le personnage virtuel passe par le rocher R_{14} » ?

3. Chaque bond du personnage virtuel nécessite 2 secondes.
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque parcours, associe sa durée en secondes.

   a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

   b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

4. Quelle devrait être la durée d'un bond du personnage virtuel pour que la durée moyenne d'un parcours soit égale à 10 secondes ?

PROBLEME : (10 points)

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan $\mathscr{P}$.

On note ln la fonction logarithme népérien.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) = ax + b - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées $(1 ; 0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b.

Partie C : Étude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. **a)** Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.

b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a)** Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

c) En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$.

a) Justifier que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

b) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

c) Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère $\left(\mathrm{O} ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie D : Calcul d'aire

On note $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en cm², de l'aire de la partie du plan $\mathscr{P}$ comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $\mathrm{H}(x) = (\ln x)^2$.
On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H.

a) Calculer $\mathrm{H}'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. **a)** Calculer $\mathscr{A}$.

b) Donner la valeur de $\mathscr{A}$ arrondie au mm².

BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités),
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$

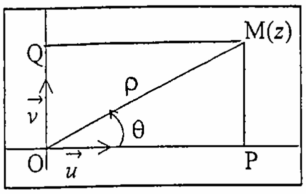
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + \mathrm{i}\, y$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \rho > 0$



$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\, \vec{u} + y\, \vec{v}$

$\overline{\mathrm{OP}} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{\mathrm{OQ}} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$\mathrm{OM} = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y') = (x + x') + \mathrm{i}(y + y')$

$zz' = (x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + \mathrm{i}y = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad ; \quad \overline{z} = x - \mathrm{i}y = \rho\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad ; \quad y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad ; \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$z z' = \left(\rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(\rho' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}\right) = \rho\rho' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\rho' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta - \theta')}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \ n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*
(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

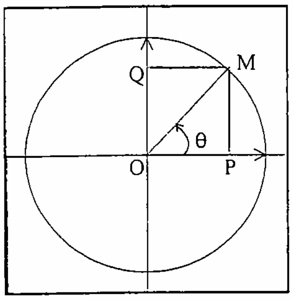
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

STi STL 1

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$; $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a)$; $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $S_n = n+1$

STI STL 2

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln \mathrm{e} = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in \left]-\infty,+\infty\right[$ et $y \in \left]0,+\infty\right[$,

$y = \exp x = \mathrm{e}^x$ équivaut à $x = \ln y$

$\mathrm{e}^0 = 1$

$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$

$\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$

$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$\left(\mathrm{e}^a\right)^b = \mathrm{e}^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

2. Suites (SÉRIES **STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)**

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

STi STL 3

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$

$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty\,,\,+\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$

STi STL 4

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

« Génie Électronique»

Session 2007

Épreuve : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 5**

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des explications entreront dans l'appréciation des copies. Toute réponse devra être justifiée.

MESURE ET REGULATION DE NIVEAU DANS UN BAC DE CONDITIONNEMENT

Dans une chaîne de production de spécialités laitières, le produit laitier est stocké dans un bac de conditionnement avant d'être mis en bouteilles. Dans ce bac, le produit doit être maintenu à un certain niveau pour garantir un remplissage régulier des bouteilles.

Le dispositif proposé ici (voir synoptique figure 1 ci-dessous) effectue la mesure et le contrôle d'un niveau de boisson lactée dans un bac de conditionnement.

Une sonde dite « capacitive » est employée pour la mesure du niveau du fluide.
Dans ce système, un afficheur renseigne en permanence les opérateurs sur le niveau du réservoir. Lorsque le niveau descend en dessous d'un certain seuil, la vanne d'arrivée de produit s'ouvre pour le remplissage du bac.

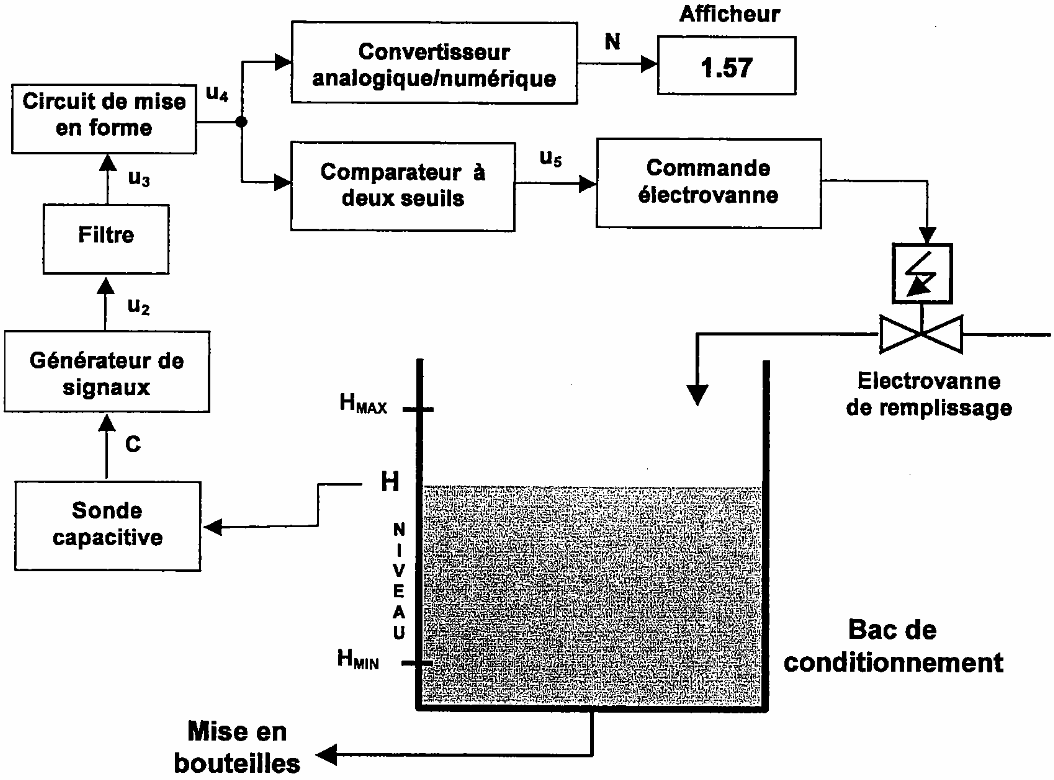


Figure 1

Informations générales :

Tous les composants sont considérés comme parfaits :

- Les circuits intégrés logiques sont alimentés sous la tension V_{DD} = 12 V. Ils ont une impédance d'entrée infinie et une impédance de sortie nulle. Leur tension de sortie peut être égale à 0 V ou à 12 V.
- Les amplificateurs opérationnels (ou AO) sont alimentés sous les tensions $+V_{CC}$ = +12 V et $-V_{CC}$ = -12 V. Ils ont une impédance d'entrée infinie et une impédance de sortie nulle. Leurs tensions de saturation sont égales à -12 V ou à +12 V.
- Les diodes sont supposées idéales.

Toutes les parties sont indépendantes à l'exception de la synthèse.
Les documents réponses 1 à 3 sont à rendre avec la copie.

A. Étude de la sonde capacitive

La sonde capacitive est assimilable à un condensateur cylindrique.
Une tige métallique cylindrique plongée au centre de la cuve forme la première armature du condensateur (voir figure 2 ci-dessous). Cette tige est recouverte d'une mince couche d'isolant (téflon). La cuve, également métallique et cylindrique, joue le rôle de deuxième armature.
Le condensateur ainsi formé possède une capacité C qui dépend du niveau de produit laitier.

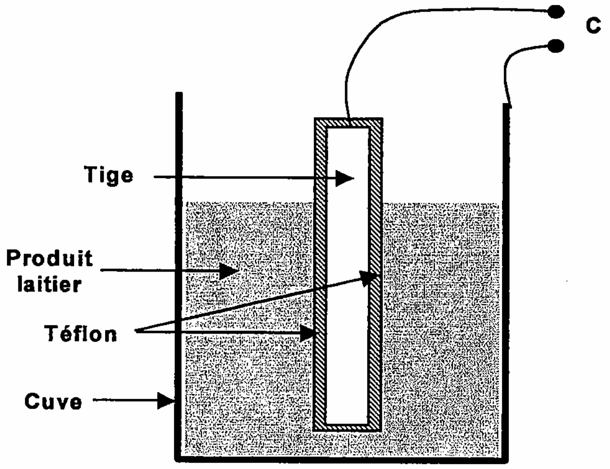


Figure 2

Détermination de C :

Le niveau H de liquide permet de décomposer, en première approximation, le condensateur cylindrique en deux condensateurs comme le montre la figure 3 ci-dessous :

- Un condensateur de capacité C_1 dont le diélectrique est seulement le téflon, le liquide étant conducteur et en contact avec la cuve.
- Un condensateur de capacité C_2 dont le diélectrique est principalement de l'air, l'épaisseur du téflon étant négligeable.

La capacité totale C du condensateur est obtenue par la relation : $\mathbf{C = C_1 + C_2}$

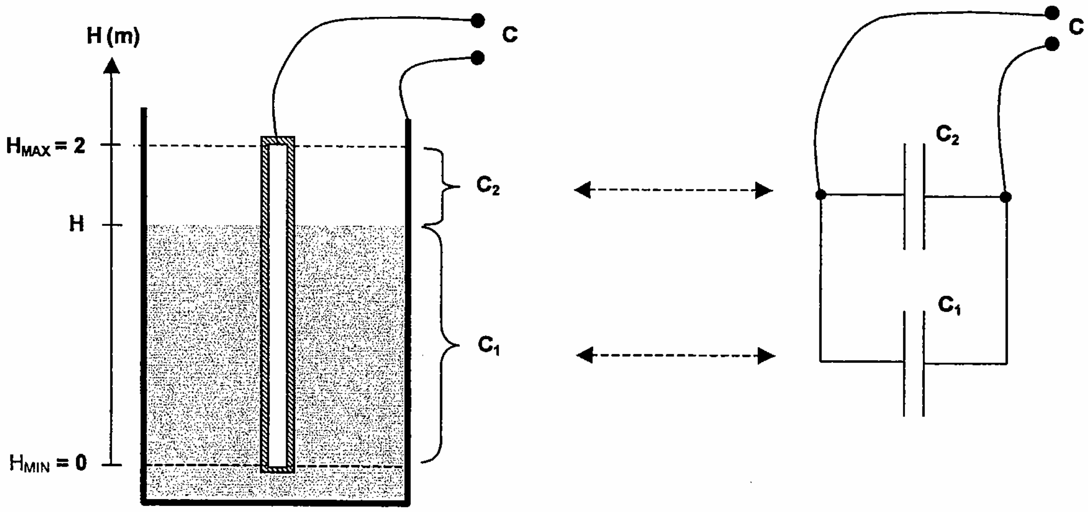


Figure 3

Calcul de la capacité d'un condensateur cylindrique

La capacité C_X (en farad) d'un condensateur cylindrique a pour expression :

$$\boxed{C_X = \varepsilon_0 \, \varepsilon_R \, \frac{2\pi L}{ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}}$$

en désignant par :

ε_0 = 8,85 pF/m : la permittivité du vide,
ε_R : la permittivité relative du diélectrique,
L : la hauteur du condensateur (en mètres),
d_1 : le diamètre de l'armature intérieure (en mètres),
d_2 : le diamètre intérieur de l'armature extérieure (en mètres).
ln désigne la fonction logarithme népérien.

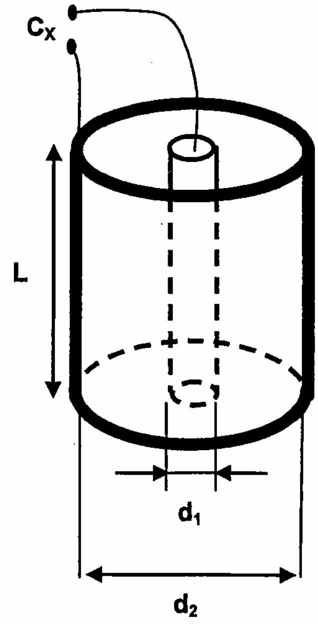


Figure 4

A.1. Étude du condensateur de capacité C_1 :

La tige de diamètre d_1 = 10 mm correspond à l'armature intérieure de ce condensateur. Le diélectrique est formé par le téflon (ε_R = 2) d'épaisseur 1 mm. Le liquide conducteur en contact avec la cuve métallique réduit alors le diamètre intérieure de l'armature extérieure à celui de l'ensemble tige + isolant (d_2 = 12 mm).

A.1.1. Pour le condensateur de capacité C_1, quelle est la relation entre sa hauteur L_1 et le niveau H ?

A.1.2. A l'aide de la relation donnant la capacité d'un condensateur cylindrique, montrer que la capacité C_1 est liée à H par la relation :

$\mathbf{C_1 = 610 \times H}$ avec C_1 en pF et H en mètre.

A.2. Étude du condensateur de capacité C_2 :

La tige de diamètre d_1 = 10 mm correspond à l'armature intérieure de ce condensateur. Le diélectrique est essentiellement de l'air (ε_R = 1). La cuve forme alors l'armature extérieure dont le diamètre est d_2 = 2,6 m.

A.2.1. Pour le condensateur de capacité C_2, exprimer sa hauteur L_2 en fonction du niveau H et de H_{MAX}.

A.2.2. A l'aide de la relation donnant la capacité d'un condensateur cylindrique, montrer que la capacité C_2 est liée à H et H_{MAX} par la relation :

$\mathbf{C_2 = 10 \times (H_{MAX} - H)}$ avec C_2 en pF et H en mètre.

A.3. Étude du condensateur équivalent de capacité C :

A.3.1. Lorsque $0 \leq H \leq H_{MAX}$, avec H_{MAX} = 2 mètres, établir la relation numérique entre la capacité C du condensateur et le niveau H sous la forme :

$$\mathbf{C = a \times H + b} \qquad \text{avec C en pF et H en mètres.}$$

A.3.2. On souhaite que $\mathbf{C = 600 \times H + 1200}$ avec C en pF et H en mètres. Pour obtenir ce résultat, il faut ajouter un condensateur de capacité fixe C_f en parallèle sur C. Quelle doit être la valeur de C_f ?

A.3.3. Calculer alors la plage de variation de C correspondante à une variation de niveau H allant de 0 à 2 mètres.

B. Le générateur de signal

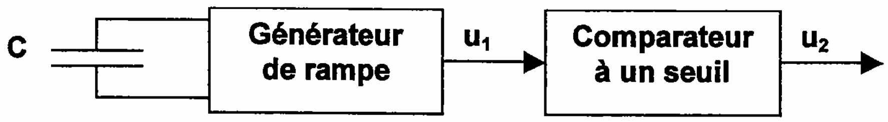


Figure 5

Le condensateur étudié précédemment est intégré dans un générateur de rampe. Le comparateur placé à la suite fournit une tension rectangulaire dont la valeur moyenne $\langle u_2 \rangle$ est proportionnelle à la capacité C du condensateur.

L'étude du montage se décomposera en trois parties :

- Étude du générateur de rampe,
- Étude du comparateur à un seuil,
- Élaboration de la relation entre $\langle u_2 \rangle$ et C.

B.1. Le générateur de rampe

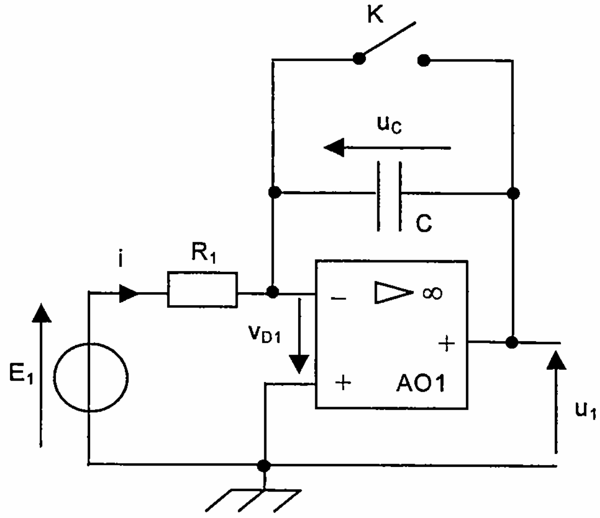


Figure 6

K est un interrupteur parfait commandé périodiquement.

E_1 est une tension constante.

B.1.1. Quel est le mode de fonctionnement de l'AO1 ? En déduire la valeur de v_{D1}.

B.1.2. Établir une relation entre les tensions u_1 et u_C.

B.1.3. L'interrupteur K est fermé.
Que vaut la tension u_C ? En déduire la valeur de la tension u_1.

B.1.4. À t = 0, K s'ouvre. On considère que $u_1(0) = 0$.

a) Exprimer i en fonction de E_1 et R_1.

b) Exprimer i en fonction de C et $\frac{du_C}{dt}$ (dérivée de u_C par rapport au temps).

c) Déduire l'expression de i en fonction de C et $\frac{du_1}{dt}$ (dérivée de u_1 par rapport au temps).

d) Exprimer $\frac{du_1}{dt}$ en fonction de E_1, R_1 et C.

e) Montrer que la tension u_1 évolue selon la relation : $\mathbf{u_1(t) =} -\frac{E_1}{R_1.C} \times t$

f) Quelle est l'allure de la tension u_1 au cours du temps ?

B.1.5. Les variations de la tension u_1 sont représentées sur le **document réponse 1 page 13**.
Sur le même document, compléter les pointillés du bandeau « État de l'interrupteur K » par les mentions « Ouvert » ou « Fermé ».

B.2. Le comparateur à un seuil :

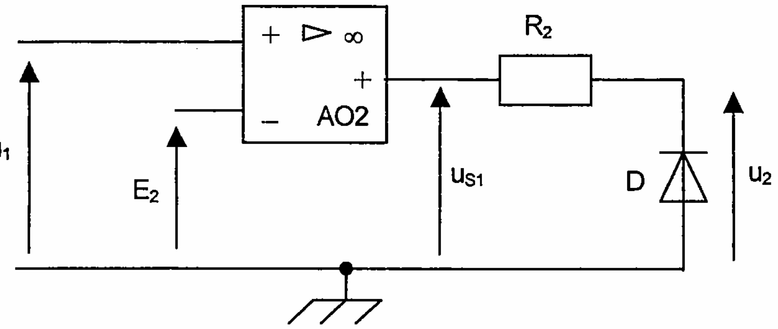


Figure 7

B.2.1. Que vaut la tension u_{S1} si $u_1 > E_2$? En déduire l'état de la diode D et la valeur de la tension u_2.

B.2.2. Que vaut la tension u_{S1} si $u_1 < E_2$? En déduire l'état de la diode D et la valeur de la tension u_2.

B.2.3. E_2 est une tension continue négative. Elle est indiquée en pointillés sur le chronogramme de la tension u_1 (**document réponse 1 page 13**).

B.2.4. Représenter l'évolution de la tension u_2 sur le **document réponse 1** en concordance de temps avec u_1.

B.3. Élaboration de la relation entre $<u_2>$ et C

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes :

- Générateur de rampe : $E_1 = 5$ V $R_1 = 100$ kΩ $T = 240$ µs
- Comparateur un seuil : $E_2 = -2{,}5$ V

B.3.1. Dans l'intervalle de temps [0, T] (T est la période de la tension u_1), on note t_1 l'instant pour lequel les tensions u_1 et E_2 sont égales de sorte que $u_1(t_1) = E_2$.

On rappelle que $u_1(t) = -\dfrac{E_1}{R_1.C} \times t$ (question B.1.4 e))

Exprimer t_1 en fonction de E_1, R_1, C et E_2.

B.3.2. Exprimer la valeur moyenne $<u_2>$ de la tension u_2 en fonction de T, t_1 et V_{CC}.

B.3.3. Montrer que $<u_2>$ est liée à la capacité C du condensateur par une relation du type : $<u_2> = k \times C$
Donner l'expression de k et vérifier que $k = 2{,}5.10^{-3}$ V/pF

C. Le filtre

Le schéma du filtre est représenté figure 8. Son étude est d'abord menée en régime sinusoïdal de fréquence f. On adopte la notation complexe où $\underline{U_2}$ et $\underline{U_3}$ sont associées aux tensions u_2 et u_3.

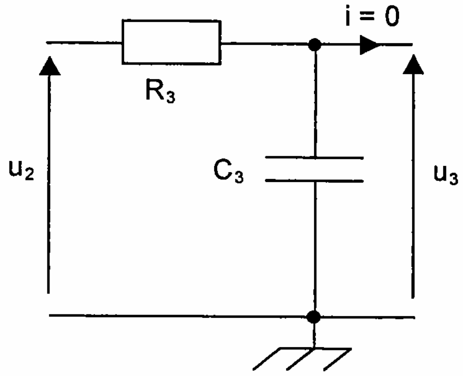


Figure 8

C.1. Comment un condensateur se comporte-t-il en très basse fréquence, en très haute fréquence ?

C.2. Montrer qu'il s'agit d'un filtre passe-bas.

C.3. Établir la fonction de transfert $\underline{T} = \frac{\underline{U_3}}{\underline{U_2}}$ et la mettre sous la forme :

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_C}}$$

Donner l'expression de f_C en fonction de R_3 et C_3.

C.4. La fréquence f_C de l'expression précédente représente la fréquence de coupure à – 3 dB du filtre. Sachant que C_3 = 100 nF, calculer la valeur de R_3 permettant d'obtenir une fréquence de coupure f_C de 10 Hz.

C.5. Exprimer T (module de $\underline{T}$).
Calculer la valeur limite T_0 de T lorsque $f \to 0$.
Calculer la valeur limite T_∞ de T lorsque $f \to \infty$.

C.6. La tension u_2, appliquée à l'entrée du filtre, est maintenant une tension rectangulaire de fréquence f très supérieure à f_C dont la décomposition harmonique (limitée aux quatre premiers termes) peut s'écrire :

$$u_2(t) = \langle u_2 \rangle + \hat{U}_{21} \times \sin(\omega t + \theta_{21}) + \hat{U}_{23} \times \sin(3\omega t + \theta_{23})$$

Expliquer pourquoi on peut considérer $\mathbf{u_3 = \langle u_2 \rangle}$.

D. Le circuit de mise en forme

La tension u_3 issue du filtre est appliquée à l'entrée du montage représenté figure 9.

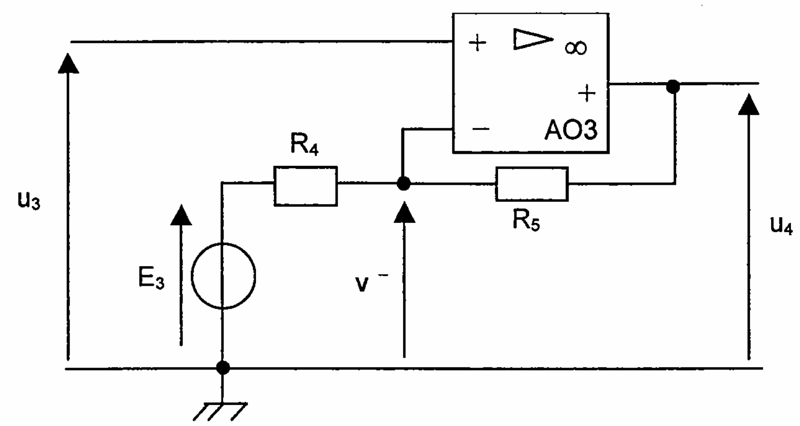


Figure 9

D.1. Sachant que le mode de fonctionnement du montage est linéaire, en déduire une relation simple entre les tensions u_3 et v^-.

D.2. Montrer que la tension de sortie u_4 dépend des tensions d'entrée u_3 et E_3 selon la relation : $\mathbf{u_4 = \frac{R_4+R_5}{R_4} \times u_3 - \frac{R_5}{R_4} \times E_3}$

D.3. Sachant que R_4 = 1 kΩ, déterminer les valeurs à donner à R_5 et E_3 pour que l'expression précédente devienne : $\mathbf{u_4 = 4 \times u_3 - 12}$

E. Le convertisseur analogique / numérique (CAN) et l'afficheur

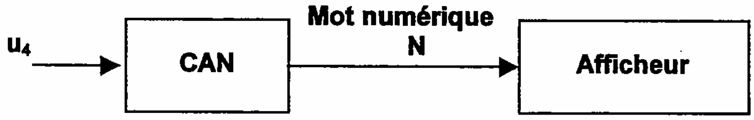
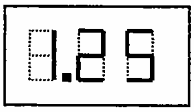


Figure 10

Pour numériser la tension u_4 issue de l'amplificateur, on emploie un CAN. On notera N la valeur décimale du mot numérique codé en binaire naturel.
On considère que l'afficheur placé à la suite du CAN indique sur 3 digits (avec point décimal fixe) la valeur de N comme le montre l'exemple suivant :

Pour N = 125, l'afficheur indique  Ce qui correspond à une hauteur H de 1,25 mètre dans le bac.

E.1. Sachant que l'afficheur peut indiquer jusqu'à une hauteur de 2 mètres, montrer qu'un CAN 8 bits convient pour ce système.

E.2. Le début de la caractéristique de transfert N = f(u_4) du convertisseur est représentée sur la figure 11 ci-après.
Déterminer le quantum q.

E.3. Déterminer, pour une tension u_4 de 4,5 V, le nombre N correspondant.
En déduire l'indication de l'afficheur.

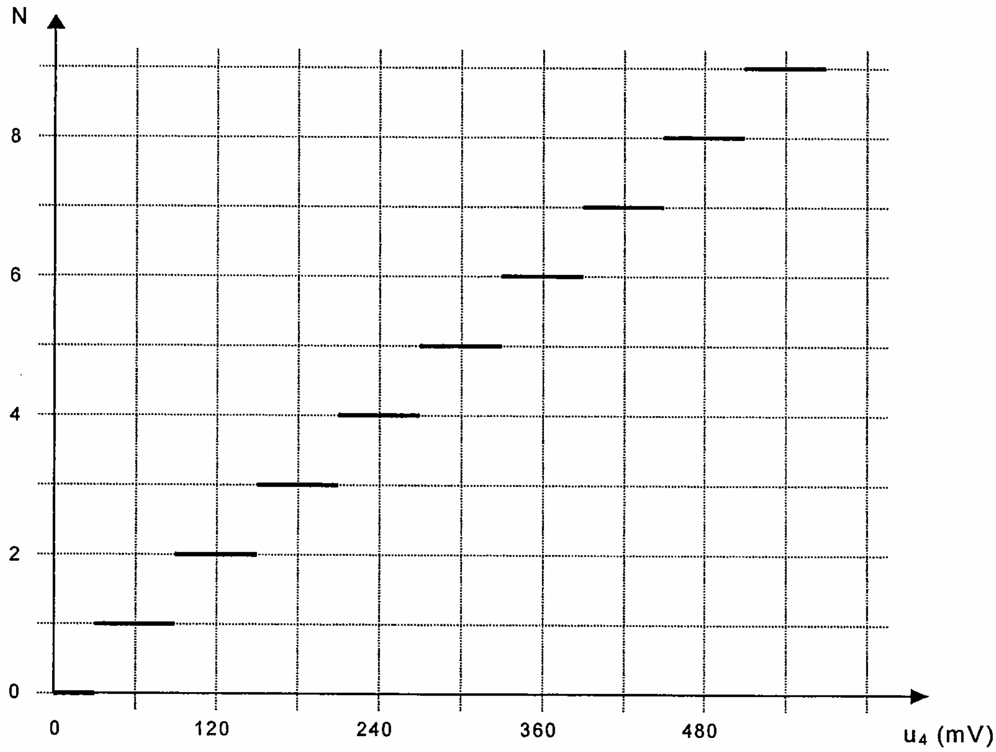
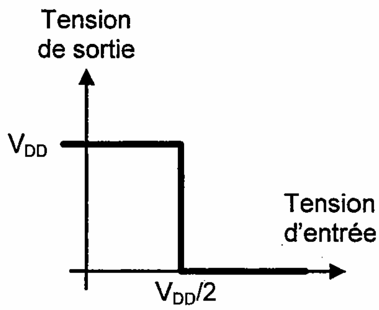


Figure 11

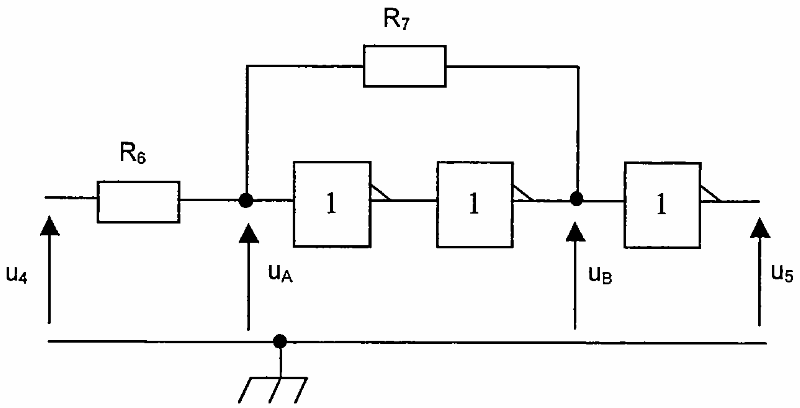
F. Le comparateur à 2 seuils

La tension u_4 issue de l'amplificateur est également appliquée à l'entrée d'un comparateur à 2 seuils réalisé à partir de portes logiques inverseuses.

La caractéristique de transfert d'une porte logique inverseuse est donnée ci-contre.



Le schéma du comparateur à 2 seuils est représenté figure 12.



$R_6 = 1\ k\Omega$
$R_7 = 2\ k\Omega$

Figure 12

F.1. Quelle est la valeur de la tension u_A qui provoque le basculement des sorties des portes logiques ?

F.2. Exprimer la tension u_A en fonction de R_6, R_7, u_4 et u_B.

F.3. En déduire l'expression de u_4 en fonction de R_6, R_7, u_A et u_B.

F.4. Sachant que u_B peut prendre les valeurs 0 et V_{DD}, exprimer les tensions de seuils U_{Haut} (seuil haut) et U_{Bas} (seuil bas) du comparateur en fonction de R_6, R_7 et V_{DD}.

F.5. Calculer les valeurs numériques de U_{Haut} et U_{Bas}.

F.6. A l'aide de la caractéristique $u_B = f(u_4)$ représentée sur le **document réponse 2 page 13**, tracer la caractéristique de transfert du comparateur $u_5 = f(u_4)$ sur le même document en fléchant le sens de parcours du cycle.

G. La commande de l'électrovanne

La tension u_5 provenant du comparateur permet de commander une électrovanne par l'intermédiaire d'un transistor bipolaire T fonctionnant en commutation comme le montre la figure 13.

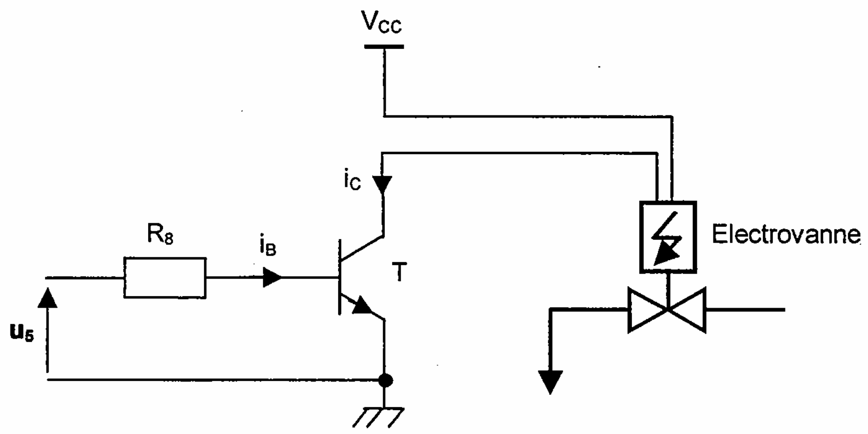


Figure 13

Caractéristiques de l'électrovanne :

- En l'absence d'alimentation, la vanne est fermée.
- Sous une tension de 12 V, la vanne s'ouvre et l'intensité du courant i_C absorbé vaut 100 mA.

Caractéristiques du transistor :

- V_{BE} = 0,7 V (transistor passant)
- Amplification en courant : β = 100
- $V_{CE\ sat}$ = 0

La tension u_5 peut prendre les valeurs 0 V ou 12 V.

G.1. On considère u_5 = 12 V.

On suppose que le transistor T est à l'état saturé.

G.1.1. A quelle tension l'électrovanne est-elle soumise ?

G.1.2. En déduire l'état de la vanne (ouverte ou fermée).

G.1.3. Que vaut alors l'intensité du courant i_C ?

G.1.4. On donne R_8 = 1 kΩ. En déduire l'intensité du courant i_B.

G.1.5. L'hypothèse sur la saturation du transistor est-elle correcte ? Justifier.

G.2. On considère u_5 = 0 V.

G.2.1. Quel est l'état du transistor T ?

G.2.2. Que vaut alors l'intensité du courant i_C ?

G.2.3. En déduire l'état de la vanne (ouverte ou fermée).

H. Synthèse

Cette synthèse vise à reprendre les résultats des différentes parties étudiées précédemment de façon à comprendre le fonctionnement global du système.

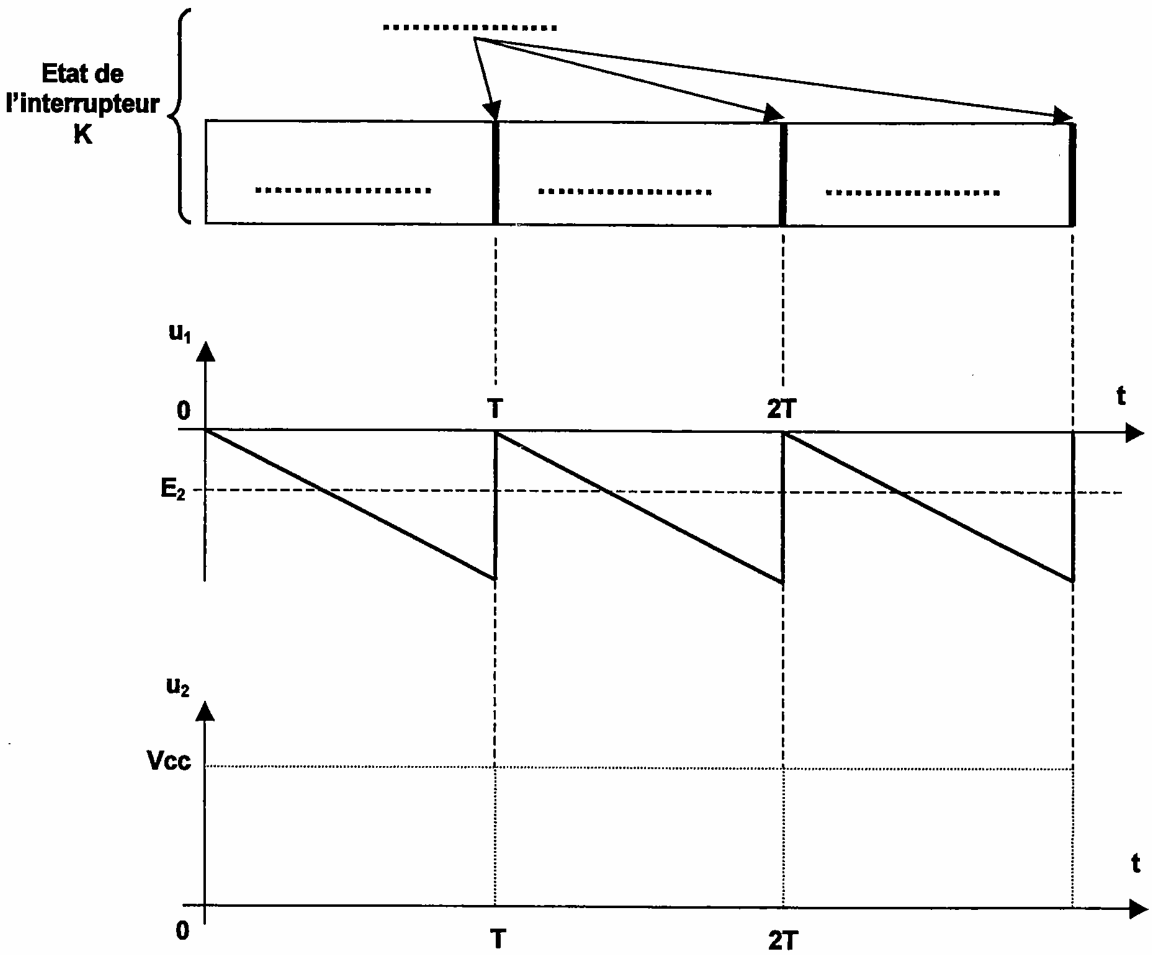
H.1. A l'aide des résultats des parties A, B, C, D et E, compléter le tableau du **document réponse 3** en haut de la page 14.

H.2. L'évolution du niveau H de produit laitier dans le bac de conditionnement est représentée sur le **document réponse 3** ainsi que la tension u_4 appliquée à l'entrée du comparateur. Représenter la tension de sortie du comparateur u_5 en concordance de temps avec u_4.

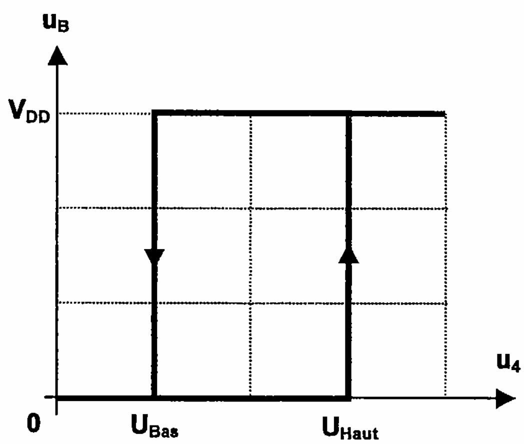
H.3. Compléter le bandeau « État de la vanne » par les mentions « Ouverte » ou « Fermée » en correspondance avec la tension u_5.

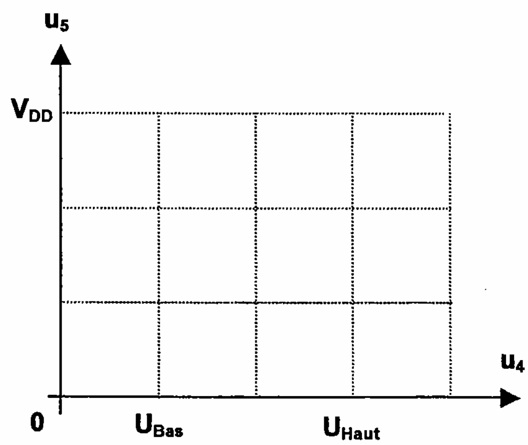
H.4. A l'aide d'une lecture graphique, déduire le niveau H_1 de produit laitier qui déclenche l'ouverture de la vanne et le niveau H_2 qui provoque la fermeture de la vanne.

Document réponse 1 *à rendre avec la copie*



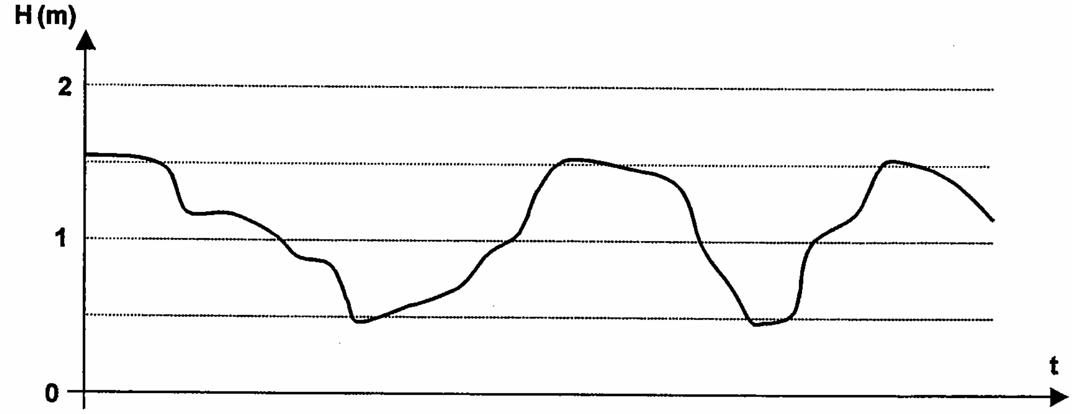
Document réponse 2 *à rendre avec la copie*

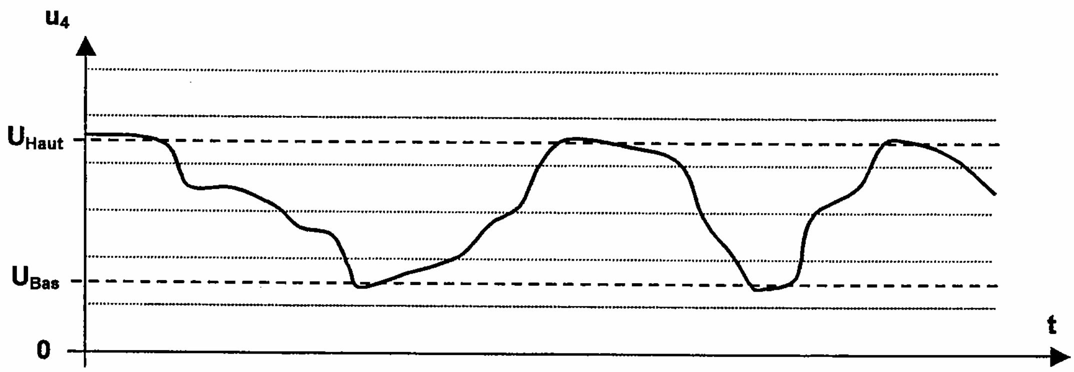


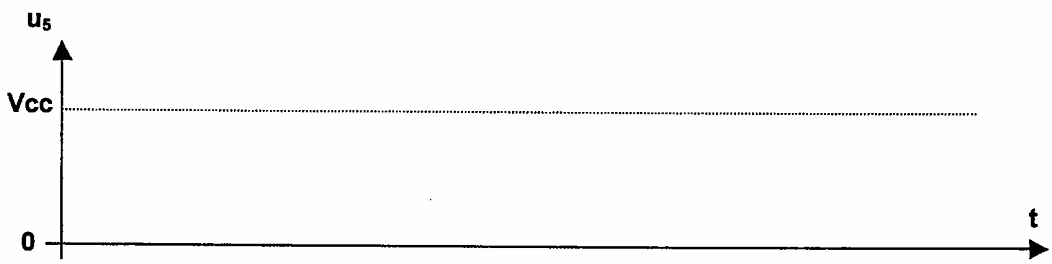


Document réponse 3 *à rendre avec la copie*

H (m)	C (pF)	$\langle u_2 \rangle$ (V)	u_4 (V)	N	Affichage
0					
0,5					
1,5					
2					







Etat de la vanne